ПРОГРАММА курса

"Дискретная математика"

Физико-технический факультет,

2,3 курс, пятый семестр

Лектор: *Мельников Ю.Б.*

1. УНИВЕРСАЛЬНЫЕ АЛГЕБРЫ. Определение универсальной алгебры $\left⟨A,F\right⟩$, где *A* - носитель, *F* - сигнатура (т.е. множество операций, точнее, символов, обозначающих операции). Примеры: группа, поле, линейное пространство. Изоморфизм универсальных алгебр. Гомоморфизм. Фактор-алгебра. Теоремы: о конгруенции, порожденной гомоморфизмом, о фактор-алгебре по конгруенции, об описании всех гомоморфных образов. Конечные универсальные алгебры, порядок конечной универсальной алгебры.
2. ПРЕДИКАТЫ, ОТНОШЕНИЯ. Декартово произведение множеств. Предикаты и отношения, связь между ними.. Алгебра предикатов и алгебра отношений. Бинарные отношения. Бинарные отношения на языке ориентированных графов. Некоторые свойства бинарных отношений: рефлексивность, симметричность, антисимметричность, транзитивность. Формулировка этих свойства на языках теории множеств и ориентированных графов. Отношение эквивалентности. Теорема о разбиении на классы эквивалентных элементов. Отношение частичного порядка. Отношение линейного порядка и полного порядка.
3. ОСНОВЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ. Канторовская “наивная” теория множеств. Сравнение множеств по мощности. Равномощные множества. Счетные множества. Континуум. Теорема о несчетности множества точек отрезка [0,1]. Теорема о мощности множества всех подмножеств. Гипотеза континуума, ее решение. Актуальная и потенциальная бесконечность. Ординалы и кардиналы. Транзитивное множество. Критерий ординала. Теорема об элементах ординала. Теорема Кантора-Бернштейна. Теорема о противоречивости наивной теории множеств. Аксиоматические теории множеств. Нечеткие множества. Алгебра нечетких множеств.
4. БУЛЕВА АЛГЕБРА. Определение, модели теории булевых алгебр: алгебра подмножеств, алгебра событий, алгебра булевых функций, связь между ними. Элементарные теоремы теории булевых алгебр: критерий "обратного элемента", законы де-Моргана. Примеры непосредственного доказательства соотношений для алгебры подмножеств и алгебры событий, и доказательства с помощью булевых функций. Атом булевой алгебры, свойства атомов. Теоремы: о строении элементов конечной булевой алгебры, о количестве элементов в конечной булевой алгебре, о двойственной булевой алгебре (замена + <\_> \*, И<\_>Л), об отношениях частичного порядка, порожденного "+" и "\*", об изоморфности конечных булевых алгебр одинаковой мощности.
5. ИСЧИСЛЕНИЯ. Понятие исчисления. Язык исчисления, множество аксиом, множество правил вывода. Теория, модель теории, противоречивые и непротиворечивые теории. ~~Теорема Геделя о полноте, теорема Геделя о неполноте. Теорема компактности. Теорема Линденбаума.~~ Исчисления высказываний (с использованием секвенций и исчисление высказываний гильбертовского типа). Схема секвенций. Линейное доказательство, дерево доказательства. Доказуемые секвенции и доказуемые формулы, истинные формулы. Узкое исчисление предикатов, теории первого порядка. ~~Понятие о модальной логике.~~
6. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГРАФОВ. Граф, мультиграф, псевдограф, ребро и дуга графа, петля вершины графа, валентность (кратность) вершины графа. Регулярные графы. Маршрут, цепь, простая цкпь, цикл, простой цикл. Длина маршрута, достижимость вершины из другой вершины. Связный граф. Связные компоненты. Расстояние между вершинами. Подграф. Изоморфизм графов. Критерий связности графа. Теорема о связности дополнительного графа. Двудольный граф, теорема Кенига. Помеченный граф, матрица смежности, матрица Кирхгофа, матрица инцидентности. Теорема о количестве маршрутов между вершинами, критерий изоморфности неориентированных графов, теорема о корнях полинома регулярного графа. Теорема о сумме элементов строки матрицы Кирхгофа. Теорема об алгебраических дополнениях к элементам матрицы Кирхгофа. Планарные графы, критерии планарности графа (без док-ва). Гомеоморфные графы. ~~Полные графы и полные многодольные графы.~~
7. ОСНОВЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ. Понятия алгоритма. Машина Тьюринга. Нормальный алгорифм Маркова. ~~Алгоритмически неразрешимые проблемы.~~
8. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГАЛУА. Определение группы, примеры групп. Элементарные теоремы теории групп: критерий единичного элемента, теорема об однозначности обратного элемента, теорема об обратном к произведению. Подгруппа, критерий подгруппы, порядок элемента, порядок группы. Смежные классы по подгруппе, теорема Лагранжа, следствия: о порядке подгруппы, о порядке элемента группы. Лемма о делимости на порядок элемента. Определение поля, примеры полей. Теоремы об умножении на нуль в поле и о делителях нуля в поле. Характеристика поля, теорема о простоте ненулевой характеристики поля, о характеристике поля. Поля Галуа, теорема о цикличности мультипликативной группы поля. Расширение поля, простое расширение поля. Теорема о надполе, как линейном пространстве. Конечное расширение поля, степень расширения поля. Алгебраический и трансцендентный элементы. Критерий конечности расширения поля. Теорема о степенях расширений, следствия о порядке простого конечного поля, о порядке конечного поля. Теорема о степени многочлена для конечного расширения поля. Кольцо многочленов, целостное кольцо, кольцо частных целостного кольца, теорема о конгруенции кольца частных, теорема о поле частных. Теорема о конгруенциях колец, фактор-кольцо. Теорема о гомоморфизмах полей. Теорема об идеалах кольца многочленов, теорема о конечном поле и кольце многочленов.

Библиографический список

1. Мельников Ю.Б. Лекции по дискретной математике. Электронный конспект лекций.
2. Мельников О.В., Ремесленников В.Н., Романьков В.А. и др. Общая алгебра/ М.:Наука.- 1990.-С.592.
3. Артамонов В.А., Салий В.Н., Скорняков Л.А. Общая алгебра/ М.:Наука.- 1991.- С.480.
4. Биркгоф Г., Барти Т. Современная прикладная алгебра/ М.:Мир.- 1976.- с.329-346, 350-364.
5. Биркгоф Г. Теория решеток/ М.:Наука.- 1984.- С.568.
6. Гаврилов Г.Н., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики/ М.:Наука.- 1992.- С.408.
7. Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич    Р.И. Лекции по теории графов/ М.:Наука.- 1990.- С.384.
8. Оре О. Теория графов/ М.:Наука.- 1980.- С.336.
9. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику/ М.:Наука.- 1979.- С.272.
10. И др. (полный список в эл.конспекте лекций).